La Transformación de Laplace

Proyecto del Seminario de Análisis

Asesor: Dr. Edgar Alejandro Arroyo,
Alumno: Ernesto Camacho Ramírez.

11 de mayo de 2022

Índice

1. Introducción

La transformación de Laplace, llamada así en honor a Pierre-Simon Laplace, es un tipo de transformación integral muy utilizada en diversas áreas de las matemáticas, física e ingenierías, principalmente por su utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales. La integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

se conoce como la *integral de Laplace*, donde $f(t)$ es una función compleja de variable real y el parámetro s es una variable compleja. En caso de que la integral converga, a la imágen de la transformación, $F(s)$, se le conoce como la *transformada de Laplace* de la función $f(t)$. La transformación de Laplace es de interés principal para los ingenieros y físicos, debido a su utilidad en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales [1]. Además es útil en la solución de ecuaciones integro-diferenciales y permite la evaluación de ciertas integrales, entre otras utilidades [2].

El objetivo principal de éste trabajo es introducir la transformación de Laplace, estudiar un selecto de sus propiedades y detalles, y finalmente mostrar su utilidad en la solución de ecuaciones diferenciales. El trabajo está dividido en dos partes, la primera parte involucra el estudio analítico de la transformación y será el contenido de éste trabajo. La segunda parte involucra la solución de distintos ejemplos representativos de ecuaciones diferenciales por medio de la transformación de Laplace.

2. Resumen Histórico

La definición *moderna* de la transformación de Laplace es relativamente reciente, su desarrollo moderno proviene principalmente del trabajo de Bernstein y Doetsch a partir de los 1920s, en específico del texto *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* de Doetsch publicado en 1937. Pero la teoría de la transformación de Laplace en general tiene una larga historia y los primeros usos de integrales de éste tipo para la solución de ecuaciones diferenciales fueron hechos por Euler en 1737 [3]. Lo que sigue es un resumen pequéno del recuento histórico de la transformación de Laplace hecho por Deakin en su trabajo *The Development of the Laplace Transform* [2].

Deakin señala que en ciertos trabajos, Euler utiliza transformaciones integrales de la forma

$$z(x,a) = \int_0^x e^{at} X(t)\, dt,$$

en la solución de ecuaciones diferenciales. En otros trabajos (1781) evalua integrales de la forma $\int_0^\infty e^{-kt} t^{n-1}\, dt$ para k complejo, efectivamente evaluando la transformación de Laplace y de Fourier de ciertas funciones. Lagrange también utilizó métodos similares a los modernos en la solución de la ecuación de onda cuando estudiaba la propogación del sonido, en donde transformó una ecuación diferencial parcial en una ordinaria mediante lo que hoy se conoce como la transformación de Fourier.

Más adelante, Laplace estudia series de poder y funciones generadoras en relación directa a la transformación de Laplace, pero principalmente es a partir de su trabajo *Mémoire sur les approximations des formules qui son fonctions de très grands nombres* (1810) en donde desarolla mucha de la maquinaria utilizada en la solución de ecuaciones diferenciales mediante transformaciones integrales en donde el *kernel* comunmente fue de la forma e^{-st}. Más adelante Laplace utiliza integrales definidas en su estudio de la probabilidad en donde considera integrales de la forma $\int_0^\infty f(t)e^{-at}\, dt$, con el objetivo de la evaluación de ciertas integrales complicadas. La transformación de Laplace de nuevo aparece en su trabajo *Théorie analytique des probabilités* (1892) en donde Deakin señala que hay acercamientos a la fórmula inversa conocida actualmente. A pesar de que fue anticipado por los trabajos de Euler y Lagrange entre otros, Laplace fue quien produjo un trabajo más completo y profundo sobre ésta transformación, y es por ésto que se le atribuye.

Más adelante, los trabajos de Fourier y Poisson en sus estudios de la ecuación de calor hicieron contribuciones importantes pero indirectas al desarrollo de la transformación. Los desarrollos teóricos hechos por Cauchy también fueron importantes especialmente para el desarollo moderno de la transformación, en primera instancia por su trabajo en el cálculo de residuos y su relación con la transformación de Fourier, y en segunda instancia, por sus aportaciones en su trabajo sobre métodos operacionales. En las siguientes decadas hubo muchas aportaciones directas e indirectas a la transformación hechas por Abel en sus trabajos sobre funciones generadoras (1820), en las investigaciones de Liouville sobre las funciones exponenciales (1832), por Murphy debido a su fórmula de inversión (1832). El trabajo de Petzeval representó una culminación de la investigación hasta ese tiempo (1860) duplicando y superando el trabajo de Laplace al introducir los trabajos de Cauchy y Liouville. A finales del siglo 19, Poincaré y Pincherle extendieron la transformación a su forma compleja motivando una acelaración en la investigación de ésta área. A inicios del siglo 19, Lerch y Bateman empezaron a utilizar la transformación en el sentido moderno, en particular Bateman la utilizó para transformar ecuaciones que surgieron del trabajo de Rutherford sobre el decamiento radioactivo.

Por otro lado, en ésta epoca Oliver Heaviside produjo una gran cantidad de trabajo conocido como el *cálculo operacional*, principalmente en el contexto de la mecánica eléctrica. El cálculo operacional de Heaviside no fue justificado de manera rigurosa, pero sus métodos fueron adoptados por ingenieros eléctricos para la solución de sus problemas. Alrededor de la misma epóca, Doetsch desarrolló el enfoque moderno y riguroso de la transformación Laplace culminando en su trabajo de 1937. Además alrededor de la epoca, se hicieron investigaciones que intentaron hacer riguroso el trabajo de Heaviside por medio de la transformación de Laplace, por ejemplo los trabajos de Bromwich [3].

Para un recuento detallado de la historia de la transformación de Laplace véase [2] y [4].

3. La Integral de Laplace

Las transformaciones integrales relacionan un espacio de funciones con otro espacio de funciones por medio de la integración. Generalmente el objetivo de aplicar transformaciones integrales es transformar una función o ecuación en otra que es más fácil manipular o analizar dentro del nuevo espacio. En general una transformación integral es de la siguiente forma

$$T\{f\}(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)\,dt$$

donde f es la función a transformar y K es una función comunmente llamado la función *kernel*. La transformación de Laplace es un tipo de transformación integral, donde el dominio de integración es la semi-recta real no-negativa, con la función kernel

$$K(s,t) = e^{-st}.$$

En el caso de la transformación de Laplace, la integral generalmente es una integral de Riemann impropia, pero ésto depende del espacio de funciones sobre el cual estamos trabajando, pues en la teoría de integración de Lebesgue, hay funciones definidas en intervalos infinitos cuya integral sí existe. En general no es fácil caracterizar todo el espacio de funciones sobre el cual la integral converge, por lo que nos restringimos a las funciones que satisfacen ciertas condiciones.

Considerando las funciones complejas de variable real, la primera restricción que imponemos es la restricción de los límites de integración al intervalo $[0,\infty)$. Debido a ésto, debería ser irrelevante como está definida la función para valores de t menores a 0, pero para facilitar la relación con la integral de Fourier y la fórmula de inversión más adelante, hacemos la restricción explicita al definir $f(t) = 0$ para todo $t < 0$. Entonces, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función compleja de variable real y s un número complejo, definimos la transformación de Laplace de la siguiente manera.

Definición 3.1. *Si la siguiente integral existe, definimos la transformación de Laplace como*

$$\mathscr{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{st} f(t)\,dt. \tag{3.1}$$

A la integral se le conoce como la integral de Laplace, y su convergencia depende de la variable compleja s.

La pregunta inmediata es, ¿qué concepto de integración nos conviene utilizar? La integral y por lo tanto la transformación de Laplace tiene sentido según la función de interés. La teoría de integración de Riemann nos limita en primera instancia a funciones acotadas sobre conjuntos acotados. Por lo tanto si utilizamos integración de Riemann, estamos obligados a utilizar la integral impropia

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{st} f(t)\,dt.$$

Dado que la integral de Lebesgue generaliza a la integral de Riemann, sería conveniente pensar la integral de Laplace como una integral de Lebesgue, con el objetivo de ampliar el conjunto de funciones transformables y además porque la integral de Lebesgue sobre conjuntos infinitos existe de forma natural para ciertas funciones; desafortunadamente existen casos importantes en donde la integral de Laplace es impropiamente integrable pero no Lebesgue integrable, por lo que parece que no podemos evitar la integral impropia totalmente si lo que buscamos es ampliar el conjunto de funciones transformables. La mayoría del material consultado para éste trabajo utiliza la teoría de integración de Riemann, por lo que nos ha sido conveniente en éste trabajo definir (3.1) como una integral de Riemann impropia, aunque casi toda la teoría es aplicable y a veces se facilita si se considera como una integral de Lebesgue [1]. Antes de analizar más de los detalles de convergencia, primeramente calculamos la transformación de unos ejemplos para familarizarnos con el concepto.

Ejemplo 3.2. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función constante $f(t) = 1$. Calculando la integral de Laplace obtenemos*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\, dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st}\, dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \left[-\frac{1}{s}(e^{-s\tau} - 1) \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{\tau\to\infty} e^{-s\tau}.\end{aligned}$$

Expresando a $s \in \mathbb{C}$ como $s = x + iy$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{\tau\to\infty} e^{-(x+iy)\tau} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{\tau\to\infty} e^{-x\tau} \left[\cos(y\tau) - i\sin(y\tau)\right].\end{aligned}$$

Observamos que si $\Re s = x \leq 0$, entonces el límite anterior no existe, por lo que la transformada de Laplace no está definida en los complejos con parte real menor o igual a cero. En cambio si $\Re s = x > 0$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}. \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.3. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ la función definida como $f(t) = e^{at}$, donde a es un número complejo. Técnicamente la función exponencial está definida en todo $\mathbb{R}$ por lo que hacemos la restricción a la semi-recta explícita. Por definición tenemos*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\, dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-(s-a)t}\, dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \left[-\frac{1}{s-a} \left(e^{-(s-a)\tau} - 1 \right) \right] \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \left(-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)\tau} \right) + \frac{1}{s-a}.\end{aligned}$$

Notemos que la integral converge solamente si $\Re(s-a) > 0$, en ese caso tenemos que la transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ es $\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-a}$ para $\Re s > \Re a$.

Ejemplo 3.4. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ dada por $f(t) = \cos(at)$ donde $a \in \mathbb{C}$. Recordemos que*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

para $z \in \mathbb{C}$, por lo tanto utilizando el ejemplo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(e^{iat} + e^{-iat} \right) e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} e^{-(s-ia)t} + e^{-(s+ia)t} \right] dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^\tau e^{-(s-ia)t}\, dt + \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^\tau e^{-(s+ia)t}\, dt \\ &= \frac{1}{2(s-ia)} + \frac{1}{2(s+ia)} \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2},\end{aligned}$$

donde $\Re s > \Re(ia) = -\Im a$ y $\Re s > -\Re(ia) = \Im a$, es decir, la integral de Laplace converge para $\Re s > |\Im k|$.

Para los ejemplos de funciones anteriores, la integral de Laplace converge para algunos valores de s. Existen funciones para las cuales la integral de Laplace no converge para ningún valor de s, por ejemplo $f(t) = e^{t^2}$. En contraste a ésta función, las funciones anteriores que sí son transformables comparten una característica en particular, son dominadas por la función e^{pt} para algún $p > 0$. Pero ésto *no* es un requisito para la convergencia en el sentido de la integral de Riemann impropia, por ejemplo, la función $f(t) = 2te^{t^2}\cos(e^{t^2})$ crece más rápido que e^{pt}, sin embargo se puede demostrar que su integral de Laplace converge para ciertos valores de s. Como veremos en la sección siguiente, no es trivial definir una clase de funciones qué abarca a todas las funciones de interés práctico, por lo que nos reduciremos a un espacio de funciones más pequeño.

3.1. Convergencia

Como se mencionó anteriormente, a pesar de qué la integral de Lebesgue sobre conjuntos infinitos puede exisitir directamente, hacemos explícito la interpretación de la integral sobre $[0, \infty)$ como una integral impropia. Por definición, es necesario que la integral

$$\int_0^\tau e^{-st} f(t)\, dt$$

exista para todo $\tau \in (0, \infty)$, en otras palabras, la función $e^{-st}f(t)$ debe ser integrable en todo intervalo finito $[0, \tau]$, antes de empezar hablar sobre el límite. Notemos que si nos limitamos a las funciones de éste tipo, nos estaríamos restringiendo a funciones acotadas en cada intervalo finito, algo qué no es conveniente, por ejemplo la función $f(t) = t^a$ para $-1 < a < 0$ tiene una relación directa con la función Γ por lo que es una función de interés en el estudio de la transformación de Laplace, pero solamente es impropiamente integrable considerando el límite inferior, es decir

$$\int_0^\tau t^a\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\tau t^a\, dt.$$

También es de interés definir la transformación de Laplace para funciones que requieren integración impropia en puntos distintos del cero, por ejemplo la función

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & 0 < t < 1, \\ 0 & t \geq 1, \end{cases}$$

es utilizada en la teoría de las funciones de Bessel [1] y requiere integración impropia en los puntos $t = 0$ y $t = 1$. En términos de la integración de Riemann, para los resultados que siguen, requerimos que $f(t)$ sea integrable en cada intervalo finito y absolutamente integrables (impropiamente) en los intervalos donde se encuentran los puntos singulares.

Despues de restringirnos a las funciones localmente integrables (en el sentido de Lebesgue, ó absolutamente localmente integrables en el sentido de Riemann), para fines prácticos, nos restringimos a estudiar las funciones que no crecen *demasiado* rápido. Sin una caracterización explícita y por lo tanto no muy útil, definimos el espacio de funciones transformables $\mathcal{L}$ de la siguiente manera.

Definición 3.5. *La clase de funciones transformables $\mathcal{L}$, consiste de las funciones complejas de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, donde $f(t) = 0$ para todo $t < 0$, localmente absolutamente integrables (impropiamente si es necesario), para las cuales existe una constante $x \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt < \infty.$$

Éste espacio de funciones es suficientemente grande para fines prácticos [3], pero sería util tener condiciones suficientes para garantizar si una función es transformable, pero antes que ésto, desarrollamos unos resultados importantes sobre el dominio de la variable s donde la integral de Laplace converge.

3.2. El Semi-Plano de Convergencia

Se puede observar que en los ejemplos anteriores, la integral de Laplace converge para un semi-plano derecho, no solamente para un solo s. En general ésto sucede para toda integral de Laplace. Para ver ésto primero demostramos el siguiente teorema, recordando que una integral converge absolutamente si la integral $\int_0^\infty |f(t)|\,dt$ existe.

Teorema 3.6. *Una integral de Laplace que converge absolutamente en un punto $s_0 \in \mathbb{C}$, converge absolutamente en el semi-plano $\Re s > \Re s_0$ donde $\Re s$ significa la parte real del número complejo s.*

Demostración. Utilizaremos el criterio de Cauchy [1], el cual nos dice que la integral de Laplace impropia converge si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\omega > 0$ tal que para todo $\omega_1 > \omega_2 > \omega$ se satisface

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-st} f(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Supongamos que la integral de Laplace converge absolutamente en el punto $s_0 \in \mathbb{C}$. Sean $\epsilon > 0$ y $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re s \geq \Re s_0$. Por el criterio de Cauchy, para el ϵ dado existe un $\omega > 0$ tal que para todo $\omega_1 > \omega_2 > \omega$, se satisface

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| e^{-s_0 t} f(t) \right| \,dt < \epsilon.$$

Entonces considerando $\Re s > \Re s_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| e^{-st} f(t) \right| \,dt &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t) \right| \,dt \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\Re(s-s_0)t} \left| e^{-s_0 t} f(t) \right| \,dt \\
&\leq \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| e^{-s_0 t} f(t) \right| \,dt \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto del criterio de Cauchy concluímos que la integral de Laplace converge absolutamente para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re s > \Re s_0$ cuando converge absolutamente para algún s_0. □

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, si definimos la función $F(s)$ de variable compleja a partir de la integral de Laplace, $F(s)$ debe ser acotoda en el interior de su plano de convergencia. Supongamos que la transformación de Laplace para una función $f(t)$ existe para cierto $s_0 \in \mathbb{C}$ con parte real $\Re s = x$. Entonces podemos definir la *abscisa de convergencia absoluta* de la integral de Laplace como

$$\alpha = \alpha(f) := \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_0^\infty |e^{-xt} f(t)|\,dt < \infty \right\}. \tag{3.3}$$

Al semi-plano abierto $\Re s > \alpha$ ó al semi-plano cerrado $\Re s \geq \alpha$, se les conoce como los *semi-planos de convergencia absoluta* de la integral de Laplace. Ocasionalmente, la integral converge sobre la recta del plano complejo definida por la abscisa de convergencia pero en lo que sigue solo consideramos el semi palno abierto $\Re s > \alpha$.

La integral de Laplace puede existir sin ser absolutamente convergente, por lo tanto para determinar el dominio de convergencia simple de una integral de Laplace, utilizamos el siguiente teorema el cual Doetsch nombra como el *teorema fundamental de la integral de Laplace.*

Teorema 3.7 (Teorema Fundamental)**.** *Si la integral de Laplace*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

converge para un $s = s_0 \in \mathbb{C}$, entonces converge en el semi-plano abierto $\Re s > \Re s_0$, donde puede ser expresado por la integral absolutamente convergente

$$(s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \phi(t)\, dt,$$

donde

$$\phi(t) := \int_0^t e^{-s_0 \tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Demostración. Supongamos que la integral de Laplace de $f(t)$ converge para s_0. Primero observemos que la función ϕ es igual a 0 para $t = 0$. Entonces utilizando integración por partes tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\omega e^{-st} f(t)\, dt &= \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t)\, dt \\ &= e^{-(s-s_0)\omega} \phi(\omega) + (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} \phi(t)\, dt. \end{aligned}$$

Como la integral converge para s_0, la función $\phi(t)$ tiene límite ϕ_0 cuando t tiende al ∞. Además la integral $\phi(t)$ es continua, por lo que ϕ es acotada en todo subintervalo finito $[0, t]$, por lo tanto $\phi(t)$ es acotada para todo $t \geq 0$, digamos por algún $M > 0$. Se sigue que para $\Re s > \Re s_0$, los límites

$$\lim_{\omega \to \infty} e^{-(s-s_0)\omega} \phi(\omega) = 0,$$

y

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} \phi(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \phi(t)\, dt$$

existen, y aquí concluímos que la integral converge para todo $\Re s > \Re s_0$. Pero además la integral anterior converge absolutamente, ya que $|\phi(t)| \leq M$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$\int_0^\infty \left| e^{-(s-s_0)t} \phi(t) \right| dt \leq M \int_0^\infty e^{-\Re(s-s_0)t}\, dt.$$

Por lo tanto cuando $\omega \to \infty$ tenemos

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \phi(t)\, dt$$

para $\Re s > \Re s_0$ donde la integral converge absolutamente. □

El teorema anterior es útil porque nos demuestra que toda integral de Laplace que converge, puede ser expresado como una integral absolutamente convergente. De la misma manera en que definimos la abscisa de convergencia absoluta, con el teorema anterior podemos definir la *abscisa de convergencia simple* (3.3) y el *semi-plano de convergencia simple*, admitiendo la posibilidad de que la integral converja para todo el plano complejo.

Corolario 3.8. *El dominio de convergencia de una integral de Laplace es el semi-plano derecho $\Re s > \alpha$, posiblemente incluyendo todo, o una parte, o nada de la recta $\Re s = \alpha$.*

De lo anterior, para las funciones del espacio $\mathcal{L}$, la transformación de Laplace converge en un semi-plano del plano complejo, más adelante analizaremos las propiedades de la función $F(s)$ dentro de éste plano. Por el momento establecemos condiciones suficientes para la existencia de la transformación de Laplace de una función f. Para hacer ésto, primero hacemos preciso la restricción al crecimiento de la función $f(t)$, definiendo el orden exponencial.

Definición 3.9 (Función de Orden Exponencial)**.** *Sea $f(t)$ una función compleja de variable real. Decimos que f es de orden exponencial x, si existen constantes $M, x \in \mathbb{R}$, con $M > 0$, tales que para algún $t_0 \geq 0$,*

$$|f(t)| \leq M e^{xt}, \quad t \geq t_0.$$

Con ésto podemos enunciar condiciones suficientes que aseguren la existencia de la transformación de Laplace de una función, limitándonos a un subconjunto de las funciones de clase $\mathcal{L}$, mediante la restricción a funciones seccionalmente continuas que no crecen muy rápido.

Teorema 3.10 (Teorema de Existencia)**.** *Si $f(t)$ es una función seccionalmente continua en $[0, \infty)$ y además es de orden exponencial x, entonces la transformación de Laplace de $f(t)$ existe.*

Demostración. Como f es de orden exponencial, entonces existen M_1, x y t_0 tales que

$$|f(t)| \leq M_1 e^{xt}, \quad t \geq t_0.$$

Además f es seccionalmente continua en el intervalo $[0, t_0]$ y por lo tanto es acotada en cada subintervalo de $[0, t_0]$ (por cotas posiblemente distintas). Tomemos la cota más grande, digamos M_2, entonces

$$|f(t)| \leq M_2, \quad 0 < t < t_0.$$

Dado que e^{xt} está acotado inferiormente por un número positivo, podemos encontrar un M suficientemente grande tal que

$$|f(t)| \leq Me^{xt}, \quad t \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \left|e^{-st} f(t)\right| \, dt &\leq M \int_0^\tau e^{-(s-x)t} \, dt \\ &= \frac{Me^{-(s-x)\tau}}{-(s-x)} - \frac{M}{-(s-x)} \\ &= \frac{M}{s-x} - \frac{Me^{-(s-x)\tau}}{-(s-x)}. \end{aligned}$$

Notemos que si $\Re s > x$, entonces tomando el límite $\tau \to \infty$, obtenemos

$$\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| \, dt \leq \frac{M}{s-x}.$$

Por lo tanto la integral impropia converge aboslutamente y por lo tanto converge. Se sigue que $f(t)$ pertenece a la clase de funciones $\mathcal{L}$ y su integral de Laplace converge para todo $\Re s > x$. □

En ésta sección hemos definido la integral de Laplace y analizado su dominio de convergencia. En la siguiente sección desarrollaremos las propiedades básicas de la transformación de Laplace, visto como un operador lineal de funciones y exponemos las propiedades necesarias para aplicar la transformación a la solución de ecuaciones diferenciales.

4. La Transformada de Laplace

Como observamos anteriormente, la interal de Laplace converge en un semi-plano derecho cuando converge para algún punto. Definimos la función $F(s)$ por medio de la integral de Laplace

$$F(s) := \mathscr{L} = \{f(t)\} \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt. \tag{4.1}$$

Estableciendo ésta correspondencia entre $f(t)$ y $F(s)$, podemos interpretarlo como una transformación. Dicha correspondencia se conoce como la *transformación de Laplace*, y cuando $\mathscr{L}$ actua sobre una función $f(t)$ adecuada, produce la función $F(s)$ llamada la *transformada de Laplace*, es por ésto que comunmente se le dice operador a pesar de no establecer un estructura específica entre los espacios de funciones. El operador $\mathscr{L}$ es un operador lineal debido a la linealidad de la integral, es decir, si $f, g \in \mathcal{L}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces la transformada de Laplace de la función $\alpha f + \beta g$ existe y satisface

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\} \tag{4.2}$$

para $\Re s > \text{máx}\{\alpha(f), \alpha(g)\}$. A parte de la linealidad $\mathscr{L}$, es importante formar un *vocabulario* de funciones transformables y sus respectivas transformadas [1], el cual nos servirá a la hora de calcular la transformación de funciones más complicadas, calcular la transformación inversa y para cuando busquemos resolver ecuaciones diferenciales. Para no extender éste trabajo demasiado hemos elegido una pequeña cantidad de las propiedades de la transformación que consideramos útiles más adelante.

4.1. Teoremas de Traslación

Unas de las propiedades más útiles de $\mathscr{L}$ es como se comporta bajo la traslación de los parámetros t y s. Para ésto primero introducimos las funciones de paso unitario, las cuales son muy usadas, especialmente en modelos de sistemas eléctricos. Primero definimos la función de paso unitario de Heaviside $u(t)$, llamada así en honor al físico-matemático Oliver Heaviside. La función $u(t)$ es igual a 0 para valores negativos e igual a 1 para valores mayores o igual a cero. Se define para todo $\mathbb{R}$ de la siguiente manera.

Definición 4.1 (Función de paso unitario ó función de Heaviside)**.**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t \geq 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

La transformada de Laplace de u existe y es igual a $F(s) = 1/s$ para $\Re s > 0$. Hacemos una modificación a la función de Heaviside de manera que la función se *traslada* al punto $a > 0$ para obtener

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a. \end{cases} \tag{4.4}$$

En éste caso la transformada de Laplace también existe y es está dada por

$$F(s) = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \Re s > 0.$$

A parte de la transformada de la función de Heaviside, consideremos la función $f(t) = e^{at}$, donde a es un parámetro complejo. Observemos que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{s-a}, \quad \Re a > \Re s.$$

Con las observaciones anteriores, podemos enunciar los siguientes dos teoremas de desplazamiento, uno afecta a la variable s y otro a la variable temporal t. **Nota**: Las demostraciones de varias de las propiedades/teoremas de aquí en adelante se omitirán al menos que sean de valor intuitivo o involucren procedimientos no triviales.

Teorema 4.2 (Primer teorema de desplazamiento)**.** *Supongamos que f es una función con transformada de Laplace $F(s)$ convergente para todo $\Re s > \Re s_0$. Entonces si $a \in \mathbb{R}$, la función dada por $e^{at} f(t)$ tiene transformada de Laplace igual a $F(s-a)$ para todo $\Re s > \Re s_0 + a$.*

Teorema 4.3 (Segundo teorema de desplazamiento)**.** *Supongamos que f es una función con transformada de Laplace $F(s)$, entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, la función $f(t-a)u(t-a)$ tiene transformada de Laplace dada por $e^{-as}F(s)$.*

4.2. Teoremas de Integración y Diferenciación

Los siguientes resultados son fundamentales para la aplicación a ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales.

Teorema 4.4. *Sea $f \in \mathcal{L}$ y definamos la función*

$$\phi(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

Supongamos que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ converge para algún $s = x_0 > 0$ real, entonces $\mathscr{L}\{\phi(t)\}$ converge para $s = x_0$, y tenemos que

$$\mathscr{L}\{\phi(t)\} = \frac{1}{s}F(s), \quad s = x_0, \text{ ó } \Re s > x_0.$$

El siguiente teorema es probablmente el más importante de las propiedades de la transformación de Laplace para la resolución de ecuaciones diferenciales ya que nos dice que la imágen de una derivada de $f(t)$ bajo $\mathscr{L}$ se puede expresar en términos de la imágen de $f(t)$, s y la evaluación de f en ciertos puntos. Nos enfocamos en las funciones definidas y diferenciables para $t > 0$, y no es un requisito que la derivada exista en $t = 0$. Para garantizar la existencia de $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ es necesario que al menos el límite $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$ exista.

Teorema 4.5. *Si $f(t)$ es una función diferenciable en $t > 0$, y $\mathscr{L}\{f'\}$ converge para algún real $x_0 > 0$, entonces el límite $f(0^+)$ existe y $\mathscr{L}\{f\}$ también converge para $s = x_0$. Obtenemos la siguiente relación*

$$\mathscr{L}\{f'\} = s\,\mathscr{L}\{f\} - f(0^+), \quad s = x_0, \Re s > x_0.$$

Además $\mathscr{L}\{f\}$ converge absolutamente para $\Re s > x_0$.

Demostración. La demostración se sigue de una aplicación del teorema (4.4) a la función $f'(t) \in \mathcal{L}$ donde

$$\phi(t) = \int_0^t f'(\tau)\,d\tau = f(t) - f(0^+).$$

Así

$$\frac{1}{s}\,\mathscr{L}\{f'(t)\} = \mathscr{L}\{\phi(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} - \mathscr{L}\{f(0^+)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} - \frac{1}{s}f(0^+).$$

Por lo tanto

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\,\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0^+), \quad \Re s > x_0.$$

□

Es claro que si la función f es continua, entonces $f(0^+) = f(0)$, por lo que $\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\,\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0)$. Por otro lado, si $f(t)$ es dos veces diferenciable en $t > 0$ y $\mathscr{L}\{f''(t)\}$ converge para algún real $x_0 > 0$, entonces podemos aplicar el teorema (4.5) de nuevo sobre f' para obtener $\mathscr{L}\{f''(t)\} = s\,\mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(0^+)$, volviendo a aplicar el teorema obtenemos

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2\,\mathscr{L}\{f(t)\} - sf(0^+) - f'(0^+), \quad s = x_0,\ \Re s > x_0.$$

Similarmente podemos calcular la transformación de la n-ésima derivada de $f(t)$ siempre y cuando las condiciones se cumplan. La demostración del siguiente teorema se sigue de un argumento inductivo parecido al anterior.

Teorema 4.6. *Si $f(t)$ es diferenciable n veces para $t > 0$, y $\mathscr{L}\{f^{(n)}\}$ converge para algún real $x_0 > 0$, entonces los límites*

$$\lim_{t\to+0} f(t) = f(0^+), \quad \lim_{t\to+0} f'(t) = f'(0^+), \quad \ldots \quad \lim_{t\to+0} f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(0^+)$$

existen, y $\mathscr{L}\{f\}$ también converge para $s = x_0$. Además tenemos que

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = s^n\,\mathscr{L}\{f\} - f(0^+)s^{n-1} - f'(0^+)s^{n-2} - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

para $s = x_0$ y $\Re s > x_0$.

Los teoremas anteriores establecen un hecho significativo, que la operación de diferenciación, en el espacio de funciones originales, corresponde con una operación algebráica en el espacio de las imágenes bajo el operador $\mathscr{L}$.

4.3. La Transformación de una Convolución

La convolución de dos funciones es importante en distintas aplicaciones físicas [3]. El comportamiento de $\mathscr{L}$ sobre la convolución de funciones resulta ser muy útil pues convierte la operación de convolución en el espacio de funciones original a un producto de funciones transformadas. Primero definimos la convolución y luego introducimos el teorema de convolución.

Definición 4.7 (Convolución)**.** *La convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ se denota como $f * g$ y se define como*

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \tag{4.5}$$

Teorema 4.8 (Teorema de Convolución)**.** *Supongamos que f y g son seccionalmente continuas en $[0,\infty)$ y de orden exponencial x, entonces*

$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} \cdot \mathscr{L}\{g(t)\}, \quad \Re s > x.$$

Se pueden verificar las propiedades de asociatividad y conmutatividad del producto en el espacio de imágenes, a partir de la asociatividad y conmutatividad de la convolución. Una utilidad del teorema anterior es en el cálculo directo de la convolución de funciones, la cual podría ser muy complicada determinar directamente. Podemos calcular la transformada de Laplace de ambas funciones, y luego buscar la función original que produce el producto de las imágenes, el siguiente ejemplo muestra ésta utilidad.

Ejemplo 4.9. *Consideremos la función de Bessel*

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

la cual tiene transformada de Laplace para $\Re s > 0$ dada por

$$\mathscr{L}\{J_0\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Para calcular la convolución $J_0 * J_0$, podemos utilizar el teorema de convolución, observando que la función

$$\mathscr{L}\{J_0 * J_0\} = \frac{1}{s^2+1},$$

es la transformada de la función seno, se sigue que la convolución de la 0*-ésima función de Bessel consigo misma está dada por*

$$(J_0 * J_0)(t) = \sin(t).$$

4.4. Funciones Generalizadas y Teoría de Distribuciones

Para poder describir fenómenos físicos adecuadamente, en ocasiones es necesario introducir conceptos que no pueden ser formalizados dentro de la teoría clásica de funciones. Por ejemplo, ante la necesidad de modelar un impulso o choque, proveniente de una descarga eléctrica o un golpe. Para resolver ésto, la teoría de distribuciones modela éstos conceptos de otra forma, evitando muchos de los problemas analíticos. La teoría de distribuciones generalmente utilizada en la teoría de la transformación de Laplace, fue desarrollada por Schwarz [5]. La idea es describir una variable física por medio de un funcional que actua sobre un conjunto de *funciones de prueba*. El concepto de función generalizada o distribución, generaliza el concepto de función y proveé un mejor mecanismo para analizar ciertos fenómenos físicos, por lo que es de gran utilidad extender la transformación de Laplace a distribuciones [1]. A pesar de ésto, solo daremos una noción intuitiva del concepto, ya que un tratado más completo queda fuera del alcance y objetivo de éste trabajo.

El primer paso es definir el espacio de funciones de prueba $\mathcal{D}$ sobre la cual las distribuciones actuan. Éste espacio consiste de todas las funciones complejas $\phi(t)$ de variable real, suaves, y con soporte compacto en la recta real. Luego definimos un funcional f como una aplicación lineal que asigna un número complejo a cada elemento del espacio $\mathcal{D}$. Una *distribución* o *función generalizada* es un funcional lineal que satisface una apropiada noción de continuidad [5]. Al complejo asignado a la función de prueba ϕ se le denota $\langle f, \phi\rangle$. El ejemplo convencional y el de nuestro interés, es la función (ó mejor, funcional) δ de Dirac. Es utilizada para para modelar impulsos y fue introducida por Paul Dirac en sus estudios de mecánica cuántica [6]. En el lenguaje de las distribuciones, se define de la siguiente manera

$$\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}. \tag{4.6}$$

Es común que se defina de manera informal como la función que satisface

$$\delta(t) = 0, \quad \forall t \neq 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\, dt = \phi(0),$$

para cualquier función $\phi(t)$ continua en $(-\infty, \infty)$. No existe una función en el sentido clásico con las propiedades de δ y por esto es que se debe utilizar un mecanismo distinto como el de distribución. Aun así, es útil hacer el abuso de notación $\langle \delta, \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt$, ya que facilita la expresión de la siguiente propiedad importante de δ:

$$\begin{aligned}
\langle \delta(t-a), \phi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\phi(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x+a)\,dx \\
&= \phi(a).
\end{aligned}$$

Ésta propiedad de $\delta(t-a)$ que permite *seleccionar* un valor $\phi(t)$ en el punto $t = a$ se le conoce como la *propiedad de harnero* del funcional delta. Ahora, nuestro interés es definir la transformación de Laplace de la δ de Dirac, para formalizar ésto es necesario definir la transformación de Laplace sobre un subconjunto de $\mathcal{D}'$, llamado el conjunto de las distribuciones atenuadas. Ésto sería ideal, especialmente porque las distribuciones generalizan las funciones, pero como mencionamos antes, ésto quedaría fuera del alcance del trabajo así que *definimos* la transformada de Laplace de δ directamente por medio la propiedad anterior.

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-as}, \quad a \geq 0. \tag{4.7}$$

Dicha transformación se puede justificar rigurosamente en la teoría de distribuciones, pero para nosotros basta con conocer sus propiedades. Terminamos ésta sección con un ejemplo de una ecuación diferencial que relaciona la función de Heaviside con la función δ.

Ejemplo 4.10. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$x'(t) = \delta(t), \quad x(0) = 0.$$

Aplicando la transformación de Laplace a la ecuación obtenemos

$$s\,\mathscr{L}\{x(t)\} - x(0) = 1.$$

Por lo tanto $\mathscr{L}\{x(t)\} = 1/s$*, y así* $x(t) = 1$*. Si definimos* $x(0) = 0$ *para todo* $t < 0$*, entonces la solución de la ecuación diferencial es la función de Heaviside. Es por ésto que comunmente se considera que la derivada de la función de paso unitario en el 0 (aunque no existe en el sentido clásico) es la función* δ *de Dirac.*

4.5. Analiticidad de la Transformada de Laplace

Analogamente a las series de potencias, una de las características más importantes de la transformada de Laplace, es que representa una función analítica.

Teorema 4.11. *La transformada de Laplace de una función* $f(t)$ *es analítica en el interior de su semi-plano de convergencia,* $\Re s > \alpha$*. Las derivadas se obtienen por medio de la diferenciación bajo el signo de la integral*

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-st} t^n f(t)\,dt = (-1)\,\mathscr{L}\{t^n f(t)\}.$$

Es importante notar que el semi-plano de convergencia de una transformada de Laplace, no necesariamente es el plano más grande en el cual la transformada es una función analítica. Pero el teorema anterior es de gran importancia ya que nos dice la imágen de $f(t)$ bajo $\mathscr{L}$ pertenece a la clase distinguida de funciones analíticas al menos en su plano de convergencia. La demostración del teorema (4.11) basicamente consiste en utilizar el teorema fundamental (3.7) para poder derivar bajo el signo de la integral de la representación de $F(s)$ como una integral absolutamente convergente y concluyendo con un argumento por inducción, los detalles se pueden ver en el libro de Doetsch [1]. Por otro lado si $f(t)$ es seccionalmente continua y de orden exponencial y por lo tanto la integral de Laplace es absolutamente convergente, la demostración se simplifica ya que podremos verificar que $F(s)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann [3].

5. Relación con la Transformada de Fourier

Comenzamos ésta sección recordando las series de Fourier y en especifico la transformada de Fourier. Veremos que hay una relación directa entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace, ya que la transformada de Laplace es una generalización en cierto sentido de la de Fourier.

5.1. Series y Transformada de Fourier

La descomposición de funciones en series es una herramienta muy útil en el análisis de dichas funciones. Exsiten ciertas clases de funciones que se pueden descomponer en una serie de polinomios, en el caso de las series de Fourier, se analizan funciones periódicas y se descomponen en *polinomios trigonométricos*. Casi cualquier función periódica puede ser decompuesta como una suma infinita de senos y cosenos. Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) introdujo las series de Fourier en 1807 para resolver una ecuación de calor, pero la prueba utilizada por Fourier no fue muy rigurosa y no fue totalmente aceptada hasta casi unos cien años despues [7].

Recordamos la serie de Fourier en su representación compleja de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periódica, Lebesgue integrable. Se puede modificar cualquier función periódica de tal modo que nos podemos restringir a las funciones con periodo 2π sin péridada de generalidad. Entonces la función f con periodo 2π se puede expresar como la serie convergente

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{5.1}$$

donde los coeficientes c_n se conocen como los coeficientes de Fourier y se calculan a partir de las propiedades ortogonales del conjunto de funciones e^{inx}, explícitamente tenemos que

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{5.2}$$

Al conjunto de coeficientes de Fourier se le conoce como la *secuencia espectral* de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Por medio de la ecuación (5.2) obtenemos la secuencia espectral c_n de f, y por medio de (5.1) recuperamos a la función f como una superposición de funciones armónicas con frecuencias $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Observamos un limitante inmediato de la serie de Fourier, pues nos restringimos a las funciones periódicas. Generalmente cuando la función en cuestión representa un fenómeno físico dependiente del tiempo t, es necesario utilizar intervalos infinitos o semi-infinitos. En éstos casos, podemos *reemplazar* la serie de Fourier por una integral y *reemplazar* el conjunto discreto de coeficientes de Fourier por una función. Para el intervalo $(-\infty, \infty)$, la serie de Fourier es reemplazada por la *integral de Fourier*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ity}\, dy. \tag{5.3}$$

Donde $\hat{f}$ se obtiene como

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt}\, dy. \tag{5.4}$$

Notamos que en éste caso no se puede recuperar a f como una superposición de oscilaciones harmónicas, ya que se requieren oscilaciones de todas las frecuencias. A la función $\hat{f}$ se le conoce como la *densidad espectral* de f, ó comunmente, la *transformada de Fourier* de f.

A diferencia de la integral que se utiliza para obtener la secuencia espectral, la función de densidad espectral requiere que la función en cuestión se comporte de tal manera que la integral impropia converge. Notamos que esto restringe severamente a la cantidad de funciones a las cuales podemos calcular la integral de Fourier, por ejemplo, excluimos las funciones constantes y los polinomios. Buscando una 'solución' a éste problema, primero analicemos el caso en que la función está definida en el intervalo semi-infinito $[0, \infty)$. Extendiendo la función al lado negativo de la recta real, por medio de la función cero, obtenemos la densidad espectral de la función por medio de

$$\hat{f}(y) = \int_{0}^{\infty} e^{-iyt} f(t)\, dt.$$

Ahora, para garantizar la convergencia de ésta integral impropia, hacemos una segunda restricción en nuestro análisis, en lugar de analizar la función f dada, analizamos a la familia de funciones $e^{-xt}f(t)$ parametrizadas por el parámetro real x. De ésta manera la función de densidad espectral también depende de x y se calcula como

$$\hat{f}_x(y) = \int_0^\infty e^{-iyt}\left[e^{-xt}f(t)\right]\,dt.$$

La integral anterior converge para todas las funciones acotadas, e incluso converge para un conjunto de funciones no acotadas pero que no crecen *más* rápido que la función e^{at} para algún a positivo, siempre y cuando $x > a$. Ahora, si $s = x + iy$ es una variable compleja, entonces podemos observar que la densidad espectral se puede escribir como

$$F(s) := \hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt.$$

la cual reconocemos inmediatamente como la integral de Laplace. Podemos observar que si $F(s)$ es la función calculada a partir de la integral de Laplace, entonces la función $F(x+iy)$ es precisamente la función de densidad espectral de la función $e^{-xt}f(t)$, donde y es la variable de frecuencia. Observemos que si $x = 0$, entonces la transformada de Fourier coincide con un *corte* de la transformada de Laplace, en el eje imaginario. Ésto se puede visualizar en la gráfica (5.1), donde $f(t) = e^{-t}\sin(t)$ para $t \geq 0$ y $f(t) = 0$ en $t < 0$. En éste sentido, la

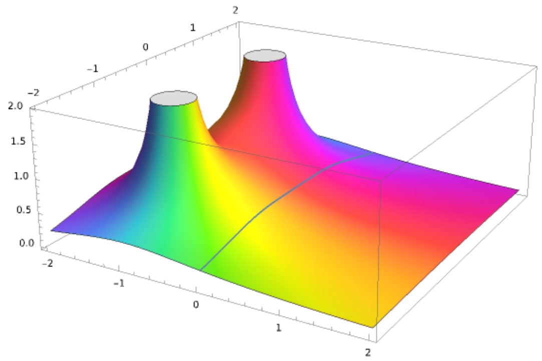

Figura 1: Gráfica de magnitud de $F(s)$ y en particular $F(iy)$.

transformada de Laplace generaliza la transformada de Fourier, y admite la transformación de una clase de funciones más amplia. Además la relación con la transformada de Fourier es muy importante en la deducción de la fórmula de inversión que veremos en la siguiente sección. Para éste fin, haremos uso del Teorema de Inversión de la transformada de Fourier.

Teorema 5.1 (Transformada Inversa de Fourier)**.** *Supongamos que f y f' son seccionalmente continuas en $\mathbb{R}$, y además supongamos que f es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, es decir*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty.$$

Entonces para todo t se cumple que

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt}\hat{f}(y)\,dy$$

donde $\hat{f}(y)$ es la transformada de Fourier de la función $f(t)$. Notemos que si la función es continua en el punto t, entonces la integral es igual a $f(t)$.

6. La Transformación Inversa

Considerando la transformación de Laplace como una correspondencia entre espacios de funciones, es lógico pensar en la operación inversa. ¿Dada una función con dominio algún semi-plano de $\mathbb{C}$, existe una única función con dominio $[0, \infty)$ tal que su transformada es dicha función? Dado que las funciones que son distintas en un conjunto de medida cero no difieren en su integral, inmediatamente concluímos que no existe una única función hablando estrictamente. Pero lo que si podemos hacer es hablar de la clase de funciones cuya integral de Laplace es la misma. Las funciones correspondientes a una clase diferen a lo mucho por funciones nulas, las cuales se definen de la siguiente manera.

Definición 6.1. *Una función nula $n(\tau)$ es aquella tal que*

$$\int_0^t n(\tau)\, d\tau = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Si consideremos integración de Lebesgue, una función es nula si y solo si es igual a 0 en casi todos lados, es decir en todos los puntos de su dominio excepto en un conjunto de medida cero. Observemos que para una función nula tenemos

$$\mathscr{L}\{n\} = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} n(t)\, dt = 0,$$

de lo anterior, y utilizando la linealidad de $\mathscr{L}$, podemos observar que si una función difiere a otra por una función nula, entonces su transformada es igual. Ésto se conoce como el teorema de Lerch.

Teorema 6.2 (Teorema de Lerch)**.** *Dos funciones cuya transformada es identica en un mismo semi-plano de convergencia, difieren solo por funciones nulas.*

Ésto nos dice que si una función $F(s)$ tiene transformación de Laplace inversa $f(t)$, entonces $f(t)$ es única salvo funciones que diferen en un conjunto de medida cero. Por lo tanto es válido hablar de *la* transformada inversa de una función del plano complejo.

Definición 6.3 (Transformación de Laplace Inversa)**.** *Si $f(t)$ tiene una transformada de Laplace $F(s)$, entonces la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ se denota como*

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t). \tag{6.1}$$

Dicha inversa es única salvo funciones cuya transformada de Laplace es igual a cero.

Al igual que la transformación de Laplace, su inversa es lineal, es decir, para funciones $F(s)$ y $G(s)$ cuya transformada inversa existe, y constantes α, β, se satisface que

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t). \tag{6.2}$$

Es importante notar que no existe un solo método que nos permita encontrar la transformada inversa de una función del plano complejo de manera garantizada. A partir de la linealidad de la transformada inversa, muchas veces podemos manipular algebráicamente a la expresión de la función de tal manera que podemos utilizar tablas de transformaciones para identificar la inversa. Bajo ciertas condiciones es posible utilizar una fórmula de inversión, la cual, junto con la analiticidad de la transformada se vuelve una herramiento fuerte herramienta de inversión.

6.1. Fórmula de Inversión

Se mencionó anteriormente que en la práctica muchas veces es posible invertir una función $F(s)$ al expresarla de tal manera que sus términos pueden ser identificados como la transformación de funciones básicas, por medio de una tabla de transformaciones. Existe otro mecanismo para invertir una transformación, por medio de la *fórmula de inversión compleja.* Haciendo uso de la relación con la transformada de Fourier, y recordando que para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, hicimos explícito el requerimiento de que $f(t) = 0$ para todo

$t < 0$, podemos extender la transformación de Laplace a todo $\mathbb{R}$. Entonces si $s = x + iy \in \mathbb{C}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= F(s) \\
&= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-iyt} \left[e^{-xt} f(t)\right]\, dt \\
&= \hat{f}_x(y),
\end{aligned}$$

donde $\hat{f}_x(y)$ es la transformada de Fourier de la función $e^{-xt}f(t)$. El teorema (5.1) require que la función $e^{-xt}f(t)$ sea absolutamente integrable, por lo tanto si la transformación de Laplace converge absolutamente para $\Re s = x > \alpha$, tenemos

$$\int_0^\infty e^{-xt}|f(t)|\, dt < \infty, \quad x > \alpha,$$

por lo tanto podemos invocar el teorema de inversión de Fourier siempre y cuando f y f' son seccionalmente continuas. Para facilitar la notación, supongamos que f es continua, entonces por el teorema (5.1), tenemos que

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{iyt} \hat{f}_x(y)\, dy,$$

ó equivalentemente

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{xt} e^{iyt} \hat{f}_x(y)\, dy.$$

Finalmente haciendo un cambio el variable $s = x + iy$, tenemos que $ds = idy$, por lo tanto podemos expresar a f como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s)\, ds = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{st} F(s)\, ds. \tag{6.3}$$

La fórmula (6.3) se conoce como la *fórmula de inversión compleja*, o la *fórmula de inversión de Fourier-Mellin*, donde la recta vertical $\Re s = x$ se conoce como la *recta de Bromwich*.

Para evaluar la integral de la fórmula de inversión, hacemos uso del hecho de que $F(s)$ es una función analítica para emplear los métodos de la integración en contornos. Sea $\Re s = x$ la recta de Bromwich y consideremos un circulo en el origen C_R de radio R. Formamos el *contorno de Bromwich* Γ_R como se muestra en la figura (2). Integrando la función $e^{st}F(s)$ sobre éste contorno (y multiplicando por el factor correspondiente) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{st} F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{BA} e^{st} F(s)\, ds. \tag{6.4}$$

Ahora, la función $F(s)$ es analítica en el semi-plano de convergencia $\Re s > \alpha$, por lo tanto todas las singularidades de $F(s)$, si es que existen, deben pertenecer a la izquierda de la recta de Bromwich. Es común que la continuación analítica de la transformada sea una función meromórfica [1], es decir $F(s)$ es analítica en $\Re s < \alpha$ excepto en un número finito de polos $z_1, z_2, \ldots, z_n$. En éste caso, eligiendo un radio R suficientemente grande, todos los polos permanecerán dentro de Γ_R. De aquí aplicamos el Teorema del Residuo de Cauchy para obtener

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{ts} F(s)\, ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(z_k),$$

donde $\operatorname{Res}(z_k)$ son los residuos de la función $e^{ts}F(s)$ en los polos $s = z_k$. Entonces de la ecuación (6.4), tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{st} F(s)\, ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(z_k). \tag{6.5}$$

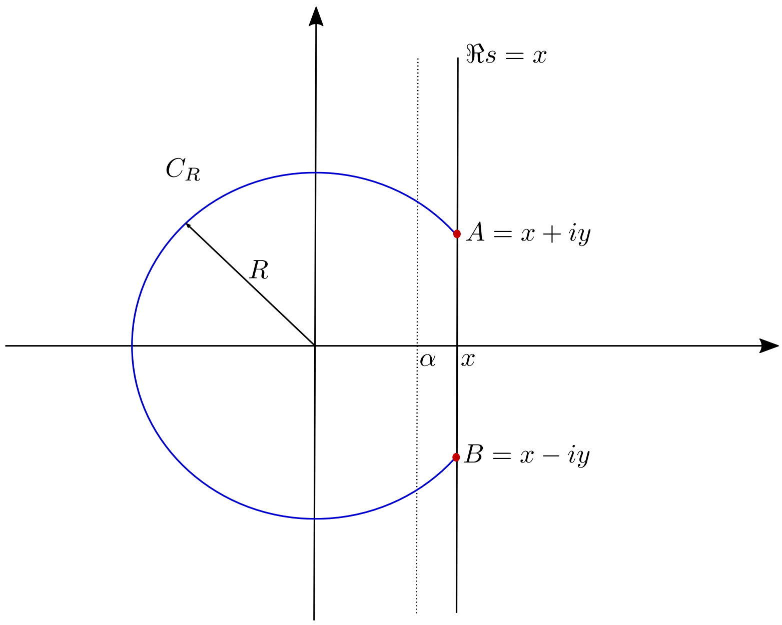

Figura 2: Contorno de Bromwich $\Gamma_R = AC_RBA$

Si el primer término de la ecuación (6.5) tiende a 0 cuando $R \to \infty$, entonces efectivamente estaríamos evaluando la integral de la transformación inversa, brindando una fórmula sencilla para calcular la inversa a partir de los residuos de la función $F(s)$. Una condición suficiente para que ésto suceda es si la función $F(s)$ sobre la curva C_r está adecuadamente acotada, ésto se resume en el siguiente lema.

Lema 6.4. *Supongamos que para $s \in C_R$, existen constantes p, M, R_0 positivas, tal que la función $F(s)$ satisface*

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|^p},$$

para todo $R > R_0$. Entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds = 0, \quad t > 0.$$

La demostración del lema anterior se puede obtener en el libro de Joel Schiff [3]. Haciendo uso del lema, enunciamos el teorema que nos permite calcular la transformación inversa con el método de los residuos.

Teorema 6.5. *Supongamos que f y f' son seccionalmente continuas y la integral de Laplace de f converge absolutamente para algún real x, entonces si la función $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ satisface la condición de crecimiento del lema (6.4), y si $F(s)$ es analítica en $\mathbb{C}$ excepto en un número finito de polos $z_1, z_2, \ldots, z_n$, entonces para todo $t > 0$ tenemos*

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s)\, ds = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(z_k).$$

Está claro que si f es continua en t entonces la integral anterior coincide con el valor de $f(t)$.

Ejemplo 6.6. *Sea $F(s)$ la transformación de Laplace de una función, dada por*

$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)}.$$

La función $F(s)$ satisface la condición de crecimiento del teorema (6.5), pues

$$|F(s)| = \frac{1}{|s||s-1|} \leq \frac{1}{|s|^2}, \qquad \textit{para todo } |s| > 1.$$

Además la función $e^{st}F(s)$ tiene dos polos simples en $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$, calculando los residuos de $e^{st}F(s)$ en éstos polos obtenemos

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{s\to 0} se^{st}F(s) = \lim_{s\to 0} \frac{e^{st}}{s-1} = -1.$$

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{s\to 1} (s-1)e^{st}F(s) = \lim_{s\to 1} \frac{e^{st}}{s} = e^t.$$

Por lo tanto del teorema (6.5) obtenemos

$$f(t) = \mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(1) = e^t - 1.$$

Es importante notar que los teoremas de inversión requieren el conocimiento de la función original de *antemano*, algo que no sucede cuando queremos resolver ecuaciones diferenciales. Por lo tanto es natural preguntar si ¿existen condiciones suficientes y necesarias para garantizar la representación de una función analítica $F(s)$ como transformada de Laplace de una función $f(t)$? Utilizando la teoría de funciones clásica, la respuesta es que sí existen condiciones suficientes pero no existen condiciones necesarias. En contraste, dentro de la teoría de distribuciones la respuesta es que sí existen condiciones necesarias y suficientes [1]. Para la sección siguiente y para la segunda parte del trabajo, generalmente asumiremos que las condiciones suficientes se cumplen.

7. Aplicaciones

Los teoremas de diferenciación son la clave de la relación entre de la transformada de Laplace con el cálculo operacional de Heaveside. La idea es utilizar la transformación de Laplace para convertir una ecuación diferencial ordinaria o parcial, en una ecuación algebráica que posiblemente es más fácil de resolver. Dado que el dominio de integración de la transformación de Laplace es la semi-recta no negativa, es particularmente útil para los problemas de valor inicial. En ésta sección exponemos brevemente unos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias e integro diferenciales.

7.1. Ecuaciones Diferenciales

La transformada de Laplace puede ser utilizada para resolver ecuaciones ordinarias lineales, ecuaciones parciales lineales y algunos sistemas lineales [3]. Primero consideremos las ecuaciones diferenciales ordinarias. El procedimiento general es el siguiente.

1. Determinamos la transformación de Laplace de ambos lados de la ecuación, obteniendo la ecuación transformada.

2. La ecuación transformada es una ecuación en la variable compleja s, resolvemos la ecuación para la función transformada.

3. Al tener una expresión de la transformada de la función en cuestión, determinar su transformada inversa.

Éste procedimiento es particularmente aplicable a los problemas de valor incial con ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes,

$$\begin{aligned} &a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 x = f(t) \qquad (7.1) \\ &x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \end{aligned}$$

A la función $f(t)$ generalmente se le conoce como *entrada*, *excitación* o *forceo*, y a la función $x(t)$ se le conoce como la *salida* ó *respuesta* [3].

Ejemplo 7.1. *Consideremos el sistema*

$$x'' + x = Eu(t-a), \quad x(0) = 0,\, x'(0) = 1.$$

El sistema recibe una señal de entrada qué es cero para todo $0 \leq t < a$ *y* E *para* $t \geq a$. *Aplicando la transformación de Laplace a la ecuación obtenemos la ecuación transformada:*

$$s^2 \mathscr{L}\{x\} - sx(0) - y'(0) + \mathscr{L}\{x\} = \frac{Ee^{-as}}{s}.$$

Aplicando las condiciones iniciales obtenemos

$$s^2 \mathscr{L}\{x\} - 1 + \mathscr{L}\{x\} = \frac{Ee^{-as}}{s},$$

agrupando términos

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{x\} &= \frac{Ee^{-as} + s}{s(s^2+1)} \\ &= \frac{1}{s^2+1} + E \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) e^{-as}. \end{aligned}$$

Aplicando la transformación inversa obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + E\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) e^{-as}\right\} \\ &= \sin(t) + Eu(t-a)\left[1 - \cos(t-a)\right]. \end{aligned}$$

Alternativamente podemos expresar la solución x *mediante*

$$x(t) = \begin{cases} \sin(t) & 0 \leq t < a \\ \sin(t) + E\left[1 - \cos(t-a)\right] & t \geq a. \end{cases}$$

El procedimiento también puede ser aplicado para obtener soluciones generales cuando los valores iniciales no son especificados, y también puede ser aplicado problemas de frontera.

Ejemplo 7.2. *Consideremos el problema de frontera*

$$x'' + \lambda^2 x = \cos \lambda t, \quad y(0) = 1,\, y\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) = 1.$$

Aplicando $\mathscr{L}$ *obtenemos la ecuación*

$$\begin{aligned} s^2 \mathscr{L}\{x\} - sx(0) - x'(0) + \lambda^2 \mathscr{L}\{x\} &= \mathscr{L}\{\cos(\lambda t)\} \\ \iff (s^2+\lambda^2)\mathscr{L}\{x\} &= \frac{s}{s^2+\lambda^2} + sx(0) + x'(0) \\ \iff \mathscr{L}\{x\} &= \frac{s}{(s^2+\lambda^2)^2} + \frac{s}{s^2+\lambda^2} + \frac{x'(0)}{s^2+\lambda^2}. \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\lambda} t \sin(\lambda t) + \cos(\lambda t) + \frac{x'(0)}{\lambda}\sin(\lambda t).$$

De la segunda condición de frontera obtenemos

$$1 = x\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) = \frac{\pi}{4\lambda^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x'(0)}{\lambda}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4\lambda^2} + \frac{x'(0)}{\lambda}.$$

Por lo tanto

$$x(t) = \frac{1}{2\lambda} t \sin(\lambda t) + \cos(\lambda t) + \left(1 - \frac{\pi}{4\lambda^2}\right)\sin(\lambda t).$$

Como mencionamos anteriormente, la transformación de Laplace tambien puede ser aplicada a sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 7.3. *Consideremos el siguiente sistema lineal*

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + y = 1$$
$$\frac{dx}{dt} + y = e^t, \quad x(0) = -1,\, y(0) = 2.$$

Aplicando la transformada a la primera ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} s\mathscr{L}\{x\} - x(0) + s\mathscr{L}\{y\} - y(0) + \mathscr{L}\{x\} + \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{1\} \\ \iff (s+1)\mathscr{L}\{x\} + (s+1)\mathscr{L}\{y\} - 1 = \frac{1}{s} \\ \iff \mathscr{L}\{x\} = \frac{1}{s} - \mathscr{L}\{y\}. \end{aligned}$$

Y de la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} s\mathscr{L}\{x\} - x(0) + \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^t\} \\ \iff s\mathscr{L}\{x\} + \mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{s-1} - 1. \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión de $\mathscr{L}\{x\}$ en la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - s\mathscr{L}\{y\} + \mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{s-1} - 1 \\ \iff (1-s)\mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{s-1} - 2 \\ \iff \mathscr{L}\{y\} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Aplicando la inversa obtenemos la solución del sistema

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 2e^t + te^t, \\ y(t) = 2e^t - te^t. \end{cases}$$

7.2. Ecuaciones Integrodiferenciales

Las ecuaciones integrodiferenciales son aquellas que involucran las derivadas de una función así como el signo de integración. Comunmente aparecen en la modelación de circuitos eléctricos, por ejemplo el siguiente que fue tomado del libro *Laplace Transformation. Theory and Applications* de Joel Schiff [3].

Ejemplo 7.4. *Consideremos la ecuación que modela la corriente I en un circuito eléctrico dada por*

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau = E,$$

donde L, C y E son constantes positivas, y además tenemos la condición inicial $I(0) = 0$. Aplicando la transformación de Laplace a la ecuación integrodiferencial obtenemos

$$Ls\mathscr{L}\{I\} + \frac{1}{Cs}\mathscr{L}\{I\} = \frac{1}{s}E.$$

Por lo tanto

$$\mathscr{L}\{I\} = \frac{CE}{LCs^2+1} = \frac{E}{L}\frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Aplicando la inversa obtenemos

$$I(t) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

La transformada también es útil para la resolución de ecuaciones parciales diferenciales, lo cual se verá con más detalle en la segunda parte del trabajo. La transformación de Laplace es útil en ciertas áreas de la probabilidad, por ejemplo, puede ser utilizada en el cálculo de las funciones generadoras de momentos de variables aleatorias positivas y su inversión [8]. Empleando las propiedades de la transformada sobre la convolución, diferenciación e integración de funciones, también podemos evaluar integrales que serían muy complicadas de evaluar directamente.

8. Conclusión

Llegamos a la conclusión de la primera parte de éste trabajo. Hemos introducido la transformación de Laplace, sus propiedades básicas, incluyendo su analiticidad en su dominio de convergencia, su fórmula de inversión, y hemos visto su utilidad en la solución de ecuaciones diferenciales con algunos ejemplos básicos.

A pesar de lo fuerte que es como herramienta de solución de ecuaciones diferenciales, la transformada de Laplace tiene algunas desventajas teóricas. Primero, la función debe cumplir con ciertas condiciones de crecimiento, luego no existe una caracterización sencilla de las imágenes de la transformada de Laplace, por lo tanto no hay una forma garantizada para saber si la solución $F(s)$ de una ecuación $P(F) = 0$ obtenida al aplicar la transformada a una ecuación $Q(f) = 0$, es la transformada de la solución $Q(f) = 0$. Ésto puedo causar problemas cuando se aplica la transformada a ciertas ecuaciones sin las precauciones necesarias. De cualquier manera, es una herramienta muy útil para el matemático, físico e ingeniero, en distintas áreas de aplicación o de investigación.

La segunda parte del trabajo consiste en un enfoque más directo a la aplicación de la transformación de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Referencias

[1] G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1974.

[2] M. A. B. Deakin, “The Development of the Laplace Transform, 1737-1937 L Euler to Spitzer, 1737-1880,” *The Laplace Transform*, p. 48, 1981.

[3] J. L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications.* Springer, 1999.

[4] M. A. B. Deakin, “The ascendancy of the Laplace transform and how it came about,” *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 44, no. 3, pp. 265–286, 1992.

[5] E. W. Cheney, *Analysis for applied mathematics.* No. 208 in Graduate texts in mathematics, New York: Springer, 2001.

[6] A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis.* New York: Dover Publications, Inc., 2014.

[7] T. Tao, *Analysis II*, vol. 38 of *Texts and Readings in Mathematics.* Singapore: Springer Singapore, 2016.

[8] A. G. Rossberg, “Laplace Transforms of Probability Distributions And Their Inversions Are Easy On Logarithmic Scales,” *Journal of Applied Probability*, p. 16, 2008.